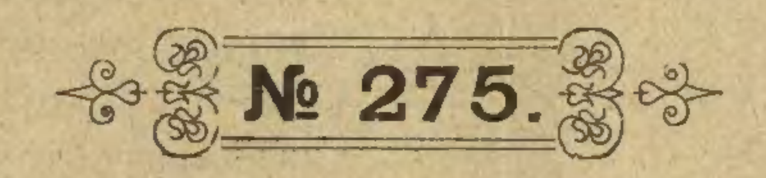
XXIII Сем. № 11.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



ОБЪ ЭЛЕМЕНТАРНОМЪ ОБЪЯСНЕНІИ

ЯВЛЕНІЯ

ПРИЛИВА и ОТЛИВА.

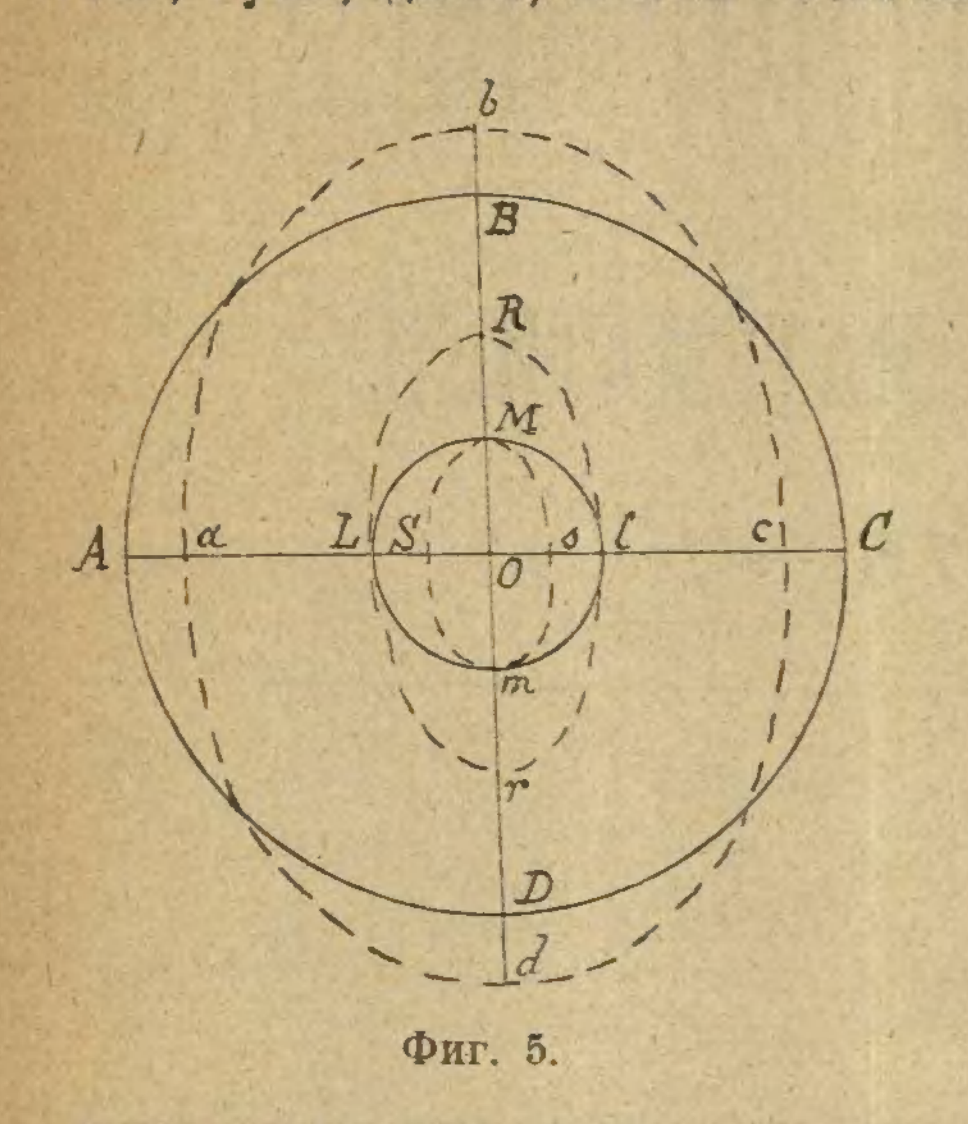
(*Окончаніе* *).

Теперь перейдемъ къ третьей причинѣ; она по мнѣнію Бернули состоитъ въ слѣдующемъ: „Третья причина, которая еще можетъ удлинить ось BD (черт. 4), состоитъ въ томъ, что вслѣдствіе самаго ея удлиненія, которое произошло отъ двухъ предыдущихъ причинъ, земное тяготѣніе, которое заставляетъ тѣла падать къ центру земли, измѣнилось. Можно смотрѣть на эту тяжесть, какъ на равную въ каналахъ GC и BC, или DC, на равныхъ разстояніяхъ отъ центра, пока земля предполагается сферическою, но какъ только эта сферичность нарушилась, естественно, что притяженіе уменьшилось въ каналахъ CB и CD и поэтому ось еще должна удлиниться“. [1]) Мнѣ кажется что выписка эта не сразу понятна и требуетъ нѣкоторыхъ разъясненій, кото-

*) См. № 274 Вѣстника.

[1]) Стр. 137—138.

рыхъ у Бернули нѣтъ. Пусть ABCD (см. черт. 5) — земная сфера, а *abcd* форма, которую она приметъ подъ дѣйствіемъ первыхъ двухъ причинъ; пусть, далѣе, L и M частички, равно удаленныя отъ центра O, такъ что LO = MO; въ такомъ случаѣ, пока земля представляетъ собой сферу, на эти частицы дѣйствуетъ притяженіе одной и той же сферы LM*lm*; если же земля приметъ форму *abcd*, то на точку L будетъ дѣйствовать тѣло LR*lr*, а на точку M—тѣло MS*ms*, которое конечно меньше тѣла LR*lr* [1]). Если же мы будемъ разсматривать точки L и R, на которыя дѣйствуетъ одно и то же тѣло LR*lr*, то увидимъ, что, такъ какъ они не одинаково удалены отъ центра, то частичка въ L притягивается къ нему сильнѣе, чѣмъ частичка R. (Ибо RO > LO).



Фиг. 5.

Вообще же, эта третья причина можетъ быть здѣсь не принята во вниманіе, такъ какъ она происходитъ не непосредственно отъ луннаго и солнечнаго тяготѣнія. Поэтому удобнѣе разсматривать ее въ томъ мѣстѣ, гдѣ опредѣляется форма равновѣсія, которую приметъ земля подъ дѣйствіемъ приливныхъ силъ. Но если мы отбросимъ эту третью причину, то окажется, что Бернули, въ объясненіи причины прилива, пошелъ назадъ въ сравненіи съ Ньютономъ: первая причина не имѣетъ смысла, если принять вторую; вторая же безъ первой, становится неполной.

Теперь перейдемъ къ трактатамъ Маклорена и Эйлера [2]); оба они излагаютъ интересующій насъ пунктъ по Ньютону, не внося въ него ничего существенно новаго. Странно только, что Эйлеръ, который въ спеціальной статьѣ излагаетъ причину приливовъ совершенно правильно, такъ же, какъ Ньютонъ, только нѣсколько болѣе растянуто, въ вышеназванномъ популярномъ сочиненіи, въ „Письмахъ къ принцессѣ", дѣлаетъ это приблизительно такъ какъ Krümmel (см. стр. 2—3). Это странно тѣмъ болѣе, что „Письма" Эйлера отличаются во многихъ отношеніяхъ большими достоинствами и въ нихъ встрѣчаются объясненія болѣе трудныя, чѣмъ *правильное* объясненіе приливовъ.

Теперь перейдемъ къ Лапласу, который внесъ много новаго въ теорію приливовъ, и посмотримъ, какъ толкуетъ онъ возникновеніе

---

[1]) Доказательство этихъ двухъ теоремъ можно найти, напримѣръ въ „Курсѣ Физики" О. Д. Хвольсона, Стр. 186—190 и 192, Т. I.

[2]) a) „De Causa Physica Fluxus et Refluxus Maris". AD D. Mac-Laurin; b) „Inquisitio Physica in Causam Fluxus et Refluxus Maris". AD. D. Euler. Обѣ статьи, какъ и вышеупомянутая статья Бернули, помѣщены въ III томѣ „Началъ". Стр. 247 и 283.

приливныхъ силъ и приливовъ. Мы находимъ такое элементарное объясненіе въ „Exposition du Sistème du Monde“ [1]). Сперва Лапласъ объясняетъ, что, вслѣдствіе тяготѣнія къ солнцу, тяжесть уменьшается въ точкахъ земной поверхности, гдѣ солнце въ зенитѣ и надирѣ [2]). Затѣмъ онъ говоритъ слѣдующее: „Въ жидкой массѣ впечатлѣнія, получаемыя каждой частичкой, сообщаются цѣлой массѣ; поэтому-то дѣйствіе солнца незамѣтное на отдѣльной частичкѣ, производитъ на океанѣ замѣчательныя явленія. Вообразимъ на днѣ моря изогнутый каналъ, имѣющій на одной изъ своихъ оконечностей вертикальную трубу, поднимающуюся надъ поверхностью моря и продолженіе которой проходитъ черезъ центръ солнца. Вода подымается въ упомянутой трубѣ непосредственнымъ дѣйствіемъ свѣтила, уменьшающаго тяжесть ея частичекъ и, *въ особенности, давленіемъ частичекъ, заключающихся въ каналѣ, которыя всѣ дѣлаютъ усиліе для соединенія подъ солнцемъ.* Возвышеніе воды въ трубѣ надъ естественнымъ уровнемъ моря будетъ интеграломъ этихъ безконечно малыхъ усилій. Если длина канала увеличится,—этотъ интегралъ будетъ больше, потому что распространится на большее протяженіе и, потому что будетъ больше разности въ направленіи и количествѣ силъ, которыми побуждаются крайнія частички. Изъ этого примѣра видно вліяніе обширности морей на явленіе приливовъ и причина, почему приливъ и отливъ нечувствительны въ небольшихъ моряхъ, какъ напр. Черное и Каспійское“. (Пер. М. Е. Хотинскаго).

Мнѣ кажется, что вся эта цитата не ясна. Именно не объяснено, откуда произошло это *усиліе*, которое *дѣлаютъ частички для соединенія подъ солнцемъ*. (La pression des molécules renfermées dans le canales,...', qui toutes font un effort pour se réunir au-dessous du soleil). Это непонятно потому, что не объясненъ способъ дѣйствія солнца на всѣ мѣста, кромѣ тѣхъ, гдѣ оно въ зенитѣ и надирѣ. Эта неясность вѣроятно была бы устранена, если бы Лапласъ на чертежѣ показалъ дѣйствіе и возникновеніе приливныхъ силъ; но, къ сожалѣнію, во всей его книгѣ нѣтъ ни одного чертежа. Во всякомъ случаѣ это объясненіе неполно и по нему трудно уяснить себѣ суть явленія.

Такъ же неясно объясненіе G. H. Darwin'а въ статьѣ его, посвященной приливамъ и помѣщенной въ Британской Энциклопедіи [3]). Въ этой статьѣ заключается полное изложеніе теоріи приливовъ и, можетъ быть, поэтому интересующій насъ вопросъ занимаетъ только нѣсколько строчекъ и истолкованъ крайне необстоятельно. Конечно здѣсь, какъ и у Лапласа, не можетъ быть рѣчи о неправильности, что видно напримѣръ изъ слѣдующей фразы: „Такимъ образомъ мы видимъ, что приливныя силы стремятся оттянуть воду къ лунѣ и отъ нея, и опустить подъ прямымъ угломъ къ этому направленію“. Но причина возникновенія этихъ силъ изложена крайне туманно.

Въ руководствѣ астрономіи Юнга [4]) я нашелъ прекрасное объ-

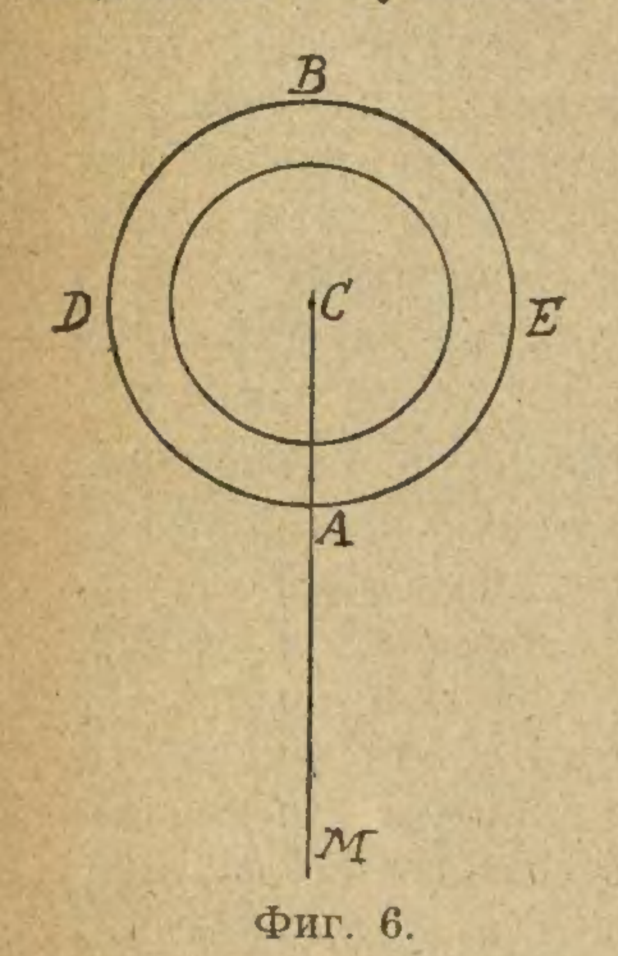
[1]) Sixiéme édition. Tome II. Paris. 1836. Стр. 177 - 9. Русск. пер. Хотинскаго. Стр. 115—117

[2]) Надиръ —точка неба, діаметрально противоположная зениту.

[3]) „The Enciclopaedia Britanica“. Ninth edition. Vol. XXIII. Edinburg. 1888 „Tides“. p. 354.

[4]) „A text-book of general astronomy“. By Charles A. Joung. 1889.

ясненіе возникновенія приливныхъ силъ. По примѣру Ньютона, Юнгъ разсматриваетъ приливы, какъ частный случай задачи о пертурбаціяхъ (о трехъ тѣлахъ), но отводитъ приливамъ отдѣльную статью, отчего выигрываетъ, въ сравненіи съ Ньютономъ, въ ясности. Но и въ этой книгѣ объясненіе не доведено до конца правильно. Въ то время, какъ возникновеніе приливныхъ силъ излагается здѣсь очень хорошо, самое объясненіе прилива неудачно; такъ что его, пожалуй, можно было бы отнести, къ одной категоріи съ объясненіемъ Krümmel'я (см. стр. 255). Вотъ переводъ его: „Очень легко поставить въ затрудненіе студента тѣмъ, что дѣйствіе луны составляетъ *поднимающую* силу, какъ въ А, такъ и въ В (см. черт. 6). Пріятно думать о землѣ, какъ о неподвижномъ тѣлѣ и о лунѣ, тоже неподвижной, притягивающей воду на землѣ и въ этомъ случаѣ, конечно, притяженіе луны, такъ какъ оно уменьшило бы тяжесть въ А, увеличило бы въ В. Однако оба тѣла не неподвижны. Пусть онъ представитъ себѣ три частички А, В и С (черт. 6) не связанныя между собой и, падающими на луну свободно; тогда очевидно, что онѣ разъединились бы; А упала бы скорѣе, чѣмъ С, а С, чѣмъ В. Теперь вообразите, что онѣ связаны эластическою нитью. Очевидно, что онѣ будутъ до тѣхъ поръ падать отдѣльно, пока натяженіе нити не предупредитъ дальнѣйшаго отдѣленія. Ея натяженіе будетъ тогда измѣрять поднимающую силу луны, которая стремится оттянуть обѣ частицы А и В отъ С.“ [1]) Если мы даже предположимъ, что земля и луна неподвижны, то всетаки, если только земля и луна будутъ притягиваться по закону Ньютона, если земная вода будетъ притягиваться къ центру земли, то приливъ будетъ происходить съ обоихъ сторонъ земли (какъ въ А, такъ и въ В). Нѣтъ необходимости разсматривать землю, падающей на луну, такъ какъ приливъ происходитъ не отъ того, что частицы въ А обгоняютъ центръ С, а частицы въ В отстаютъ отъ него; а отъ того, что частицы въ D и Е стали тяжелѣе, а частицы въ А и В—легче, и первыя вытѣсняютъ послѣднія. Кромѣ того эластическая нить очень неудачно представляетъ силу тяготѣнія. Если мы растянемъ такую нить, то сила ея упругости увеличится, а отъ того, что мы поднимаемъ тѣло, оно не станетъ тяжелѣе.



Фиг. 6.

Наконецъ перейдемъ къ послѣдней изъ разбираемыхъ нами книгъ, къ популярнымъ лекціямъ сэра Вилльяма Томсона [2]). Здѣсь приливамъ посвящена большая статья съ нѣсколькими добавленіями. Объясненіе Томсона въ общемъ сходно съ объясненіемъ Юнга; но у Томсона нѣтъ обстоятельнаго изложенія возникновенія приливныхъ силъ, которое неудобно было привести въ популярной лекціи въ такомъ видѣ, какъ у

[1]) Стр. 282.

[2]) „Popular Lectures and Addresses“ by sir William Thomson. Vol. III. Navigational affairs. London. 1891.

Юнга. Кромѣ того Томсонъ, какъ и Лапласъ, не объясняетъ почему въ точкахъ D и E (см. черт. 6) тяжесть должна увеличиться. Томсонъ яснѣе выражаетъ ту мысль, что, если бы земля не падала на луну, то не было бы приливовъ съ двухъ сторонъ земли, а вода собралась бы на сторонѣ, обращенной къ лунѣ. Эта мысль встрѣчается у него два раза и, конечно здѣсь о неправильности и рѣчи быть не можетъ: „Если бы луна и земля, говоритъ онъ въ своей лекціи, удерживались бы вмѣстѣ несгибаемой палкой, вода стремилась бы притянуться къ сторонѣ ближайшей къ лунѣ, — и поднялась бы до громадной высоты во много сотъ футовъ“. [1]) Затѣмъ въ добавленіи онъ говоритъ: „Первый невѣжда видитъ въ этомъ случаѣ, что луна притягиваетъ воду земли къ себѣ и собираетъ ее вверхъ, а слѣдовательно на одну сторону земли, что не всегда невѣрно. Но на самомъ дѣлѣ это не такъ. А такъ было бы, если бы земля и луна были въ покоѣ и недопускались другъ къ другу несжимаемой палкой или колоной. Если бы земля и луна были воткнуты въ два конца твердой палки и представлялись покоющимися, тогда притяженіе луны стремилось бы нагнать воду земли къ части ея ближайшей къ лунѣ“. [2]) Но разница между словами Томсона и Юнга состоитъ въ слѣдующемъ: у Юнга прямо говорится о неподвижности земли и луны, а у Томсона эта неподвижность происходитъ отъ того, что между землей и луной находится несжимаемое твердое тѣло. Если какое либо тѣло удерживается отъ паденія на землю твердымъ предметомъ, напр. лежитъ на столѣ, то оно давитъ на него. Если же оно удерживается отъ паденія силою, дѣйствующей на всѣ его точки сразу, напр. центробѣжной или притяженіемъ другого тѣла, то никакого давленія быть не можетъ. Не буду вдаваться въ дальнѣйшее разъясненіе этого вопроса, замѣчу только, что если „первый невѣжда“ заключитъ, что луна соберетъ воду на сторону земли, обращенную къ лунѣ, то заключитъ это вовсе не по той причинѣ, какъ Томсонъ, а просто вслѣдствіе своего невѣжества. Поэтому я думаю, что колона Томсона только собьетъ читателя.

Для объясненія прилива совершенно безразлично, падаетъ ли земля къ лунѣ и солнцу или не падаетъ. Можно говорить: во-первыхъ, что земля падаетъ на луну (или солнце) и что приливныя силы происходятъ отъ стремленія частичекъ жидкости падать на луну съ различными скоростями; во-вторыхъ, можно говорить, что разстояніе земли отъ луны не мѣняется, и приливныя силы происходятъ отъ неравнаго притяженія луны на различныя части земли; наконецъ, въ-третьихъ, можно сказать, какъ это дѣлаетъ напримѣръ Даніилъ Бернули [3]), что земля удерживается на неизмѣненномъ разстояніи отъ луны (или солнца) центробѣжными силами; тогда приливныя силы возникнутъ вслѣдствіе того, что центробѣжныя силы для всѣхъ точекъ земли равны, а центростремительныя, т. е. силы тяготѣнія къ лунѣ, не равны

[1]) Стр. 156.

[2]) Стр. 194—195.

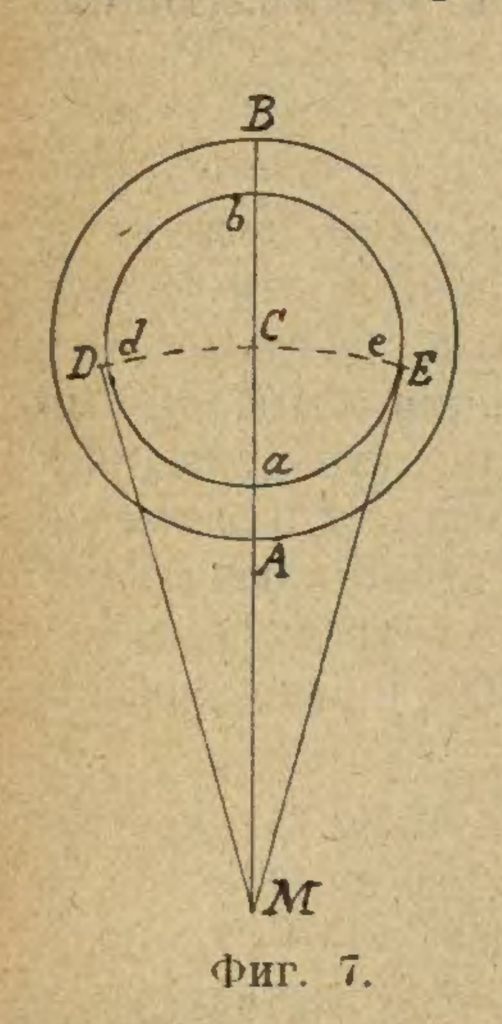
[3]) Такъ поступаетъ Бернули при изложеніи своей второй причины приливовъ и отливовъ (см. стр. 260).

между собой. Всѣ три эти манеры изложенія одинаково правильны, и выборъ той или другой изъ нихъ зависитъ отъ доброй воли автора.

Такимъ образомъ мы видимъ, что правильное и понятное объясненіе приливовъ затеряно и, не только составители популярныхъ книгъ и учебниковъ пользуются неправильнымъ, но таковое находимъ мы и въ спеціальныхъ книгахъ. Только Лапласъ, Томсонъ и G. Darwin не дѣлаютъ ошибки при объясненіи приливовъ, но ихъ объясненія нельзя назвать популярными.

Поэтому я постараюсь дать здѣсь правильное и понятное объясненіе. Для лицъ, знающихъ математику въ объемѣ курса классической гимназіи, нѣтъ ничего лучше объясненія Ньютона, приведеннаго мною выше, или вѣрнѣе популяризаціи его объясненія Le Seur'омъ и Jacquier (см. стр. 558—259). Для книгъ же вродѣ Ньюкомба, Реклю, Клейна и т. п., гдѣ неудобно помѣстить математическое построеніе съ разложеніемъ силъ, и вообще для лицъ мало знакомыхъ съ математикой, я думаю, можно предложить слѣдующее:

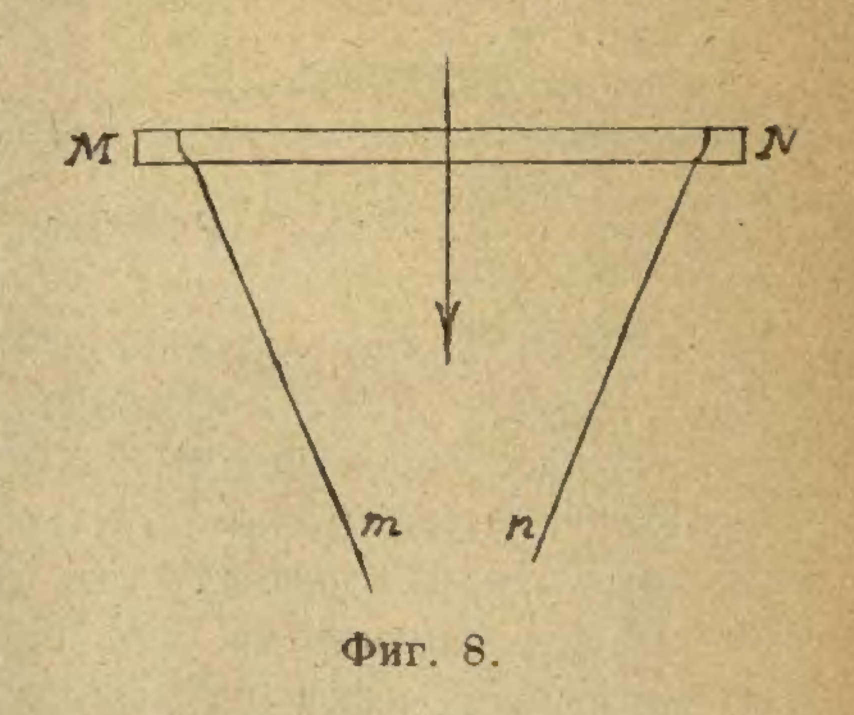
Пусть М (см. черт. 7)—луна; кругъ ABCD разрѣзъ земли плоскостью проходящею черезъ М и центръ земли С. И пусть земля со всѣхъ сторонъ покрыта глубокою водою. Если бы на всѣ точки земли луна дѣйствовала съ одинаковой, по величинѣ и направленію, силой, то земля приняла бы форму шара. На самомъ же дѣлѣ этого нѣтъ. Согласно закону Ньютона, сила тяготѣнія къ лунѣ въ точкѣ А больше, чѣмъ въ С, а сила тяготѣнія въ С больше, чѣмъ въ В. Твердое ядро *adbe* притягивается къ М съ такою силой, какъ будто бы вся его масса находилась въ С, центрѣ земли. Отъ этого происходитъ то, что частицы воды въ А притягиваются къ лунѣ силою большей, чѣмъ твердое ядро, и частицы въ В притягиваются силою меньшей, чѣмъ ядро. Поэтому частицы въ А и В стремятся отстать отъ ядра, отдѣлиться отъ него. Но онѣ удерживаются на прежнемъ мѣстѣ силою своей собственной тяжести, которая гораздо больше чѣмъ сила, оттягивающая ихъ отъ ядра. При этомъ сила тяжести должна ослабѣть. Пояснимъ это такимъ примѣромъ: представьте себѣ, что на чашкѣ вѣсовъ лежитъ гиря, скажемъ, въ 100 пудъ, которую мы не въ состояніи поднять силою нашихъ мышцъ. Но когда мы будемъ тянуть ее вверхъ силою въ 1 пудъ, мы не поднимемъ ее, а уменьшимъ вѣсъ. Дѣйствительно для уравновѣшенія ея, въ то время какъ мы тянемъ, потребуется не 100 пудъ, а только 99 Итакъ, въ точкахъ А и В тяжесть уменьшается, вода становится легче.



Фиг. 7.

Далѣе, пусть точки D и E отстоятъ отъ М на разстояніи равномъ СМ, тогда силы ихъ тяготѣнія къ лунѣ равны силѣ тяготѣнія твердаго ядра *abcd*; но направленія этихъ силъ не тѣ же, что направленіе силы дѣйствующей на это ядро. Поэтому тяжесть въ D и E должна увеличиться. Представьте себѣ, что къ концамъ палки MN

(см. черт. 8) привязаны веревки M*m* и N*n*, и мы тянемъ за эти веревки такъ, что прямыя M*m* и N*n* при продолженіи должны пересѣчься (какъ это показано на чертежѣ 8). Тогда часть нашей силы пойдетъ на перемѣщеніе палки MN въ направленіи стрѣлки, другая же часть будетъ стремиться сжать палку, сблизить точки M и N. Подобное же происходитъ на землѣ въ точкахъ E и D (см. черт. 7), такъ какъ силы дѣйствующія на эти точки направлены такъ же, какъ и силы дѣйствующія на концы M и N нашей палки (черт. 8). Итакъ, въ точкахъ D и E одна часть силы тяготѣнія къ лунѣ производитъ то же дѣйствіе, что и сила дѣйствующая на твердое ядро *abcd*, а другая стремится сблизить точки D и E, и, слѣдовательно, прибавляется къ земной тяжести, дѣлаетъ тѣла въ D и E тяжелѣе.



Фиг. 8.

Въ точкахъ промежуточныхъ между A и D, D и B, B и E, E и A (см. черт. 7) дѣйствіе луны отчасти подобно дѣйствію на точки A и B, отчасти дѣйствію на точки D и E. Тамъ гдѣ сильнѣе первое дѣйствіе, тяжесть меньше обыкновенной; въ мѣстахъ же, гдѣ сильнѣе второе дѣйствіе тяжесть больше обыкновенной. Такъ что, чѣмъ ближе частицы воды къ точкамъ A или B, тѣмъ меньше ихъ тяжесть; чѣмъ ближе онѣ къ D и E, тѣмъ тяжесть ихъ больше.

Вслѣдствіе такого неравенства вѣса воды въ A и B съ одной стороны, и въ D и E съ другой, получается то, что вода изъ мѣстъ D и E вытѣсняется слегка въ мѣста A и B; и это происходитъ до тѣхъ поръ пока меньшая тяжесть не нейтрализуется большей высотой, а значитъ и массой. Тогда земля приметъ овальную форму.

Это объясненіе нѣсколько растянуто, но за то оно вполнѣ элементарно и можетъ быть понято безъ особыхъ знаній математики.

Резюмирую все вышесказанное: Явленіе прилива и отлива давно бросилось въ глаза человѣку, но до Ньютона всѣ попытки объяснить его были безплодны. Ньютонъ же показалъ, что приливы и отливы являются необходимымъ слѣдствіемъ его теоріи тяготѣнія. Послѣ него теорія приливовъ развилась въ обширнѣйшее ученіе, но элементарное объясненіе основного пункта, данное Ньютономъ слишкомъ 200 лѣтъ назадъ, почти совершенно забылось. Поэтому желательно: во-первыхъ воскресить забытую мысль, а во-вторыхъ популяризировать ее еще болѣе элементарнымъ объясненіемъ.

Д. С. Шоръ.

Одесса. 28 мая (9 іюня) 1899 г.

Очеркъ геометрической системы Лобачевскаго.

В. Кагана.

(*Продолженіе* *).

XII. Развитіе идей Лобачевскаго.

Въ настоящей заключительной главѣ мы не имѣемъ намѣренія дать сколько нибудь цѣльный очеркъ развитія идей Лобачевскаго; это значило бы выйти далеко за предѣлы той задачи, которую мы имѣли въ виду, публикуя настоящую статью. Мы намѣтимъ только нѣсколько основныхъ моментовъ, чтобы дать читателю нѣкоторое представленіе о тѣхъ изслѣдованіяхъ, которыя имѣли цѣлью дополнить ученіе Лобачевскаго и сообщить его разсужденіямъ необходимую доказательность.

Поэтому мы удѣлимъ лишь очень мало мѣста Іоанну Болье. Отецъ этого геометра, Вольфгангъ Болье, профессоръ математики въ Маросъ-Васарели (Maros Vásárhelyt) въ 1832 г. опубликовалъ сочиненіе: „Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseos purae, elementaris ac Sublimioris, methodo intuitiva, evidentique huic propria, introducenti". Къ этому сочиненію приложены три приложенія, изъ которыхъ одно принадлежитъ его сыну, капитану венгерской арміи, Іоанну Болье и заключаетъ изложеніе геометрической системы, по существу не отличающейся отъ системы Лобачевскаго. Здѣсь нѣтъ той обстоятельности, нѣтъ той детальной разработки, какую мы находимъ у Лобачевскаго; аналитическая сторона почти вовсе отсутствуетъ; и при всемъ томъ, все существенно важное, что сдѣлано Лобачевскимъ,—мы находимъ и у *Болье*. Въ 1854 г. В. Болье выпустилъ новое сочиненіе, содержаніе котораго достаточно ясно формулировано въ обширномъ заглавіи книги: „Kurzer Grundriss eines Versuches: I Die Arithmetik, durch zweckmässig construirte Begriffe von eingebildeten und unendlich-kleinen Grössen gereinigt, anschaulich und logisch-streng darzustellen. II In der Geometrie, die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, des Winkels allgemein, der winkellosen Formen, und der Krummen, der verschiedenen Arten der Gleichheit und dgl., nicht nur scharf zu bestimmen, sondern auch ihr Sein im Raume zu beweisen: und da die Frage, ob zwei von der dritten geschnittene Geraden, wenn die Summe der inneren Winkel nicht = 2R, sich schneiden oder nicht? niemand auf der Erde ohne ein Axiom (wie Euclid das XI) aufzustellen, beantworten wird; die davon abhängige Geometrie abzusondern; und eine auf die Ja Antwort, andere auf das Nein so zu bauen, dass die Formeln der letzten auf ein Wink auch in der ersten gültig seien".

„Краткій очеркъ опыта: I. Наглядно и строго-послѣдовательно изложить ариѳметику, освободивъ ее съ помощью цѣлесообразно построен-

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физ." № 272.

ныхъ понятій отъ мнимыхъ и безконечно-малыхъ величинъ. II. Въ геометріи не только строго опредѣлить понятія прямой линіи, плоскости, угла вообще, образовъ, не имѣющихъ угловъ, кривыхъ, различныхъ видовъ равенства и т. п., но даже доказать ихъ существованіе въ пространствѣ; и такъ какъ на вопросъ, пересѣкаются ли двѣ прямыя, если при пересѣченіи ихъ третьей онѣ образуютъ внутренніе односторонніе углы, сумма которыхъ не равна $2d$, никто на землѣ не отвѣтитъ, не вводя новой аксіомы, (въ родѣ XI акс. Евклида), то выдѣлить независящую отъ этого геометрію и построить одну геометрію, основанную на положительномъ отвѣтѣ и другую, основанную на отрицательномъ отвѣтѣ; при томъ такъ, чтобы формулы послѣдней, по одному мановенію, становились бы пригодными и для первой."

Замѣчательно, что и основы абсолютной геометріи въ этомъ сочиненіи имѣютъ большое сходство съ системой Лобачевскаго, изложенной въ „Новыхъ Началахъ." Такъ, напримѣръ, мы находимъ у Болье тѣ же системы концентрическихъ сферъ, пересѣченіемъ которыхъ опредѣляется плоскость.

Однако, книги Болье, какъ и сочиненія Лобачевскаго, долго оставались доступными лишь немногимъ отдѣльнымъ лицамъ и только Гауссъ, бывшій въ тѣсной дружбѣ съ В Болье, умѣлъ оцѣнить ихъ по достоинству. Это лишній разъ доказываетъ, что причина медленнаго распространенія этихъ идей кроется въ сущности вопроса, а не въ консерватизмѣ той или другой группы ученыхъ.

При всемъ томъ во второй половинѣ текущаго столѣтія эти идеи начинаютъ назрѣвать. Бельгійскій геометръ де-Тилли, независимо отъ Лобачевскаго и Болье, приходитъ къ тѣмъ-же воззрѣніямъ—и, располагая уже готовой системой, узнаетъ, что въ ней нѣтъ ничего существенно новаго, что такая же система уже опубликована на четверть вѣка раньше. Въ 1868 г онъ публикуетъ, однако, мемуаръ, *) увѣнчанный бельгійской академіей, въ которомъ излагаетъ основанія механики въ томъ видѣ, въ какомъ она должна существовать въ пространствѣ Лобачевскаго. Однако, и этотъ мемуаръ не сыгралъ серьезной роли въ исторіи вопроса.

Все же 1868 годъ оказался знаменательнымъ въ дѣлѣ развитія идей Лобачевскаго.

Итальянскій геометръ А. Бельтрами много занимался вопросами картографическаго соотвѣтствія и въ частности знаменитой задачей объ изображеніи шара на плоскости. Характеръ изображенія долженъ быть таковъ, чтобы геодезическимъ линіямъ поверхности соотвѣтствовали прямыя на плоскости. Такое изображеніе оказывается возможнымъ какъ для поверхностей, имѣющихъ постоянную положительную кривизну, такъ и для поверхностей, имѣющихъ постоянную отрица-

*) De-Tilly. Etudes de mechanique absraite. Mém. couronnés de l'Acad. Royale de Belgique. T XXI. 1868.

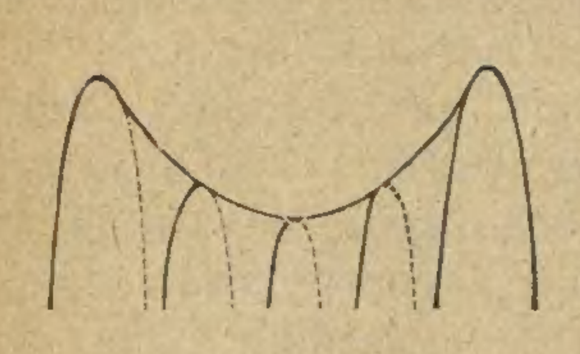
Нѣкоторые вопросы, относящіеся къ механикѣ гиперболическаго пространства, оригинально и обстоятельно изслѣдованы г. Іошкевичемъ. „Вѣстникъ Оп. Физ." №№

тельную кривизну. Это обстоятельство послужило для Бельтрами основаніемъ къ детальному изученію поверхностей постоянной отрицательной кривизны.

Принимая за координаты точки на изображаемой поверхности декартовы координаты той точки на плоскости, которая служитъ ея изображеніемъ,—онъ находитъ выраженіе элемента длины въ этой координаціи; послѣ извѣстныхъ преобразованій оказывается возможнымъ отождествить это выраженіе съ дифференціаломъ длины на плоскости Лобачевскаго. Развитіе этой идеи приводитъ Бельтрами къ тому заключенію, что геометрія этихъ поверхностей, названныхъ имъ псевдосферами, совпадаетъ съ планиметріей Лобачевскаго.

Это значитъ: геодезическія линіи на псевдосферѣ, какъ прямыя на плоскости, могутъ быть продолжены неопредѣленно, не возвращаясь въ точку исхода; черезъ каждыя двѣ точки на псевдосферѣ проходитъ только одна геодезическая линія; далѣе вся абсолютная часть евклидовой геометріи примѣняется къ геодезическимъ линіямъ и окружностямъ на псевдосферѣ; но черезъ каждую точку псевдосферы оказывается возможнымъ провести на ней цѣлый пучекъ геодезическихъ линій, не встрѣчающихъ данной геодезической линіи. Дальнѣйшая часть планиметріи Лобачевскаго естественно оправдывается на псевдосферѣ, разъ на ней справедливы тѣ положенія, изъ которыхъ она формально развивается.

Что касается самой формы псевдосферы, то каждая ея площадка имѣетъ сѣдлообразную форму, (фиг. 1), какъ и всѣ вообще поверхности съ отрицательной кривизной (см. введеніе). Псевдосфера можетъ безконечно простираться во всѣ стороны. Мы говоримъ *можетъ*, потому что поверхность эта не имѣетъ какой нибудь строго опредѣленной формы; форма псевдосферы можетъ быть крайне разнообразной. Чтобы уяснить себѣ это, достаточно принять во вниманіе, сколь разнообразную форму могутъ имѣть поверхности постоянной нулевой кривизны: сюда принадлежатъ цилиндры, конусы и всѣ вообще развертывающіяся на плоскость линейчатыя поверхности. Тѣмъ разнообразнѣе должна быть форма поверхностей постоянной отрицательной кривизны, которая зависитъ еще отъ одного перемѣннаго параметра,—отъ мѣры кривизны поверхности. Установить здѣсь какую нибудь классификацію тѣмъ труднѣе, что мы не располагаемъ общимъ уравненіемъ этихъ поверхностей *). Но съ другой стороны, если мы знаемъ одну поверхность постоянной отрицательной кривизны ($-k^2$), то всякая другая поверхность, имѣющая ту же кривизну, можетъ быть на ней развернута, какъ это было подробно объяснено во введеніи.



Фиг. 1.

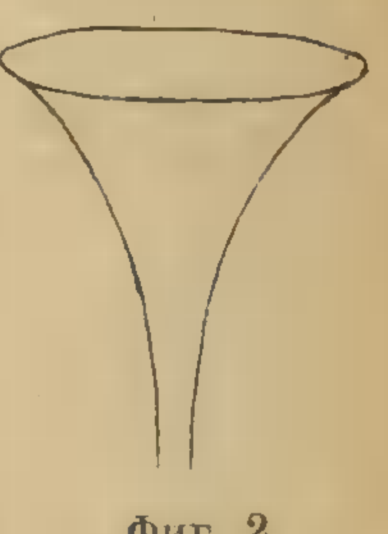
Въ силу этого можно ограничиться изученіемъ для каждаго значенія кривизны одной типичной поверхности. Бельтрами задается по-

*) Изученіе геометріи поверхности опирается на выраженіяхъ Гауссовыхъ коэффиціентовъ E, F, G элемента длины.

этому вопросомъ, не существуетъ ли *поверхностей вращенія*, имѣющихъ постоянную отрицательную кривизну. Рѣшеніе этого вопроса не представляетъ затрудненія. Существуетъ безчисленное множество кривыхъ, которыя, вращаясь вокругъ постоянной прямой (скажемъ—вокругъ оси абсциссъ), образуютъ поверхность, имѣющую заданную отрицательную кривизну. Простѣйшая изъ этихъ кривыхъ выражается въ прямоугольныхъ декартовыхъ координатахъ уравненіемъ:

$$Y\cosh(x+\sqrt{k^2-y^2})=K$$

Она обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что часть касательной, заключенная между точкой касанія и осью абсциссъ, имѣетъ постоянную длину. Кривая эта изображена на фигурѣ (фиг. 2). Эта поверхность вращенія имѣетъ для поверхностей постоянной отрицательной кривизны то же значеніе, что и сфера для поверхностей съ постоянной положительной кривизной, хотя существенно отличается отъ послѣдней тѣмъ обстоятельствомъ, что на ней всегда имѣются ребра. Прибавимъ еще, что не на всѣхъ видахъ псевдосферы *вполнѣ* оправдывается геометрія Лобачевскаго. Причина этого выясняется слѣдующимъ сравненіемъ. Мы указывали во введеніи, что евклидова геометрія *вполнѣ* можетъ быть перенесена на параболическій цилиндръ; но круговой цилиндръ имѣетъ уже значительныя отступленія, вслѣдствіе того, что нѣкоторыя геодезическія линіи (сѣченія плоскостями, перпендикулярными къ оси) замкнуты. Точно такъ же существуютъ поверхности постоянной отрицательной кривизны, неопредѣленно простирающіяся во *всѣ* стороны, къ которымъ *вполнѣ* примѣнима геометрія Лобачевскаго. Но геометрія псевдосферы вращенія въ нѣкоторыхъ пунктахъ уже отступаетъ отъ этой системы.



Фиг. 2.

Картографическія изслѣдованія, на которыхъ покоятся всѣ эти результаты, опубликованы Бельтрами еще въ 1866 г. *) Самыя же эти идеи изложены въ знаменитомъ мемуарѣ „Saggio di interpretazione della Geometria non-Euclidea“, опубликованномъ въ 1868 г. въ Giornale di Mathematiche“; поверхность же вращенія, о которой мы говорили, изслѣдована въ мемуарѣ „Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche“, опубликованномъ въ томъ же журналѣ въ 1872 г.

Эти изслѣдованія Бельтрами произвели большую сенсацію. Часть геометрической системы Лобачевскаго—его планиметрія—нашла себѣ истолкованіе въ извѣстныхъ образахъ,—а для огромнаго большинства это всегда играетъ самую важную роль; для вопроса же столь своеобразнаго какъ геометрическія ученія Лобачевскаго и Болье, такая ин-

*) „Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette“. Annali di Mat. T. VII 1866

терпретація имѣла особенно важное, можно даже сказать, рѣшающее значеніе. Люди, наиболѣе скептически относившіеся къ ученію Лобачевскаго, уже никакъ не могли считать его „сплошной нелѣпостью"; именно потому эти работы и послужили толчкомъ къ изученію Лобачевскаго; литература этого вопроса, состоявшая до 68-го года изъ 5—6 сочиненій, стала быстро рости и самыя идеи Лобачевскаго естественно получили вслѣдствіе этого самое разнообразное освѣщеніе, широкое развитіе и распространеніе.

Какой же выводъ можно сдѣлать изъ излѣдованій Бельтрами по отношенію къ задачѣ Лобачевскаго? Выводъ этотъ, въ корнѣ, быть можетъ, еще не достаточно обоснованный, напрашивается съ перваго взгляда, самъ собой; онъ былъ высказанъ Гуэлемъ *) весьма скоро послѣ опубликованія мемуара Beltrami въ слѣдующемъ видѣ: изъ изслѣдованій Бельтрами вытекаетъ, что евклидовъ постулатъ не можетъ быть доказанъ при помощи одной планиметріи. Впрочемъ, обоснованіе этого утвержденія требуетъ прежде всего слѣдующей оговорки: мы *допускаемъ*, что абсолютная часть геометріи, (т. е. независящая отъ постулата евклидова) сама по себѣ не заключаетъ внутренняго противорѣчія; внѣ такого допущенія не можетъ быть рѣчи о доказательствѣ постулата. Исходя поэтому изъ такого допущенія, мы обозначимъ черезъ X, какъ въ предыдущей главѣ, абсолютную часть геометріи, черезъ y положеніе Евклида также въ томъ видѣ, въ какомъ мы его формулировали въ предыдущей главѣ (стр. 208). Мы тамъ подробно разобрали, въ какомъ отношеніи положеніе y можетъ стоять къ системѣ X; именно мы видѣли, что a priori можно сдѣлать слѣдующія предположенія:

a) Положеніе y противорѣчитъ системѣ X; b) оно представляетъ собой логическое слѣдствіе этой системы; c) оно не зависитъ отъ нея. Мы желаемъ показать, что ни въ первомъ, ни во второмъ, ни въ третьемъ случаѣ положеніе это не можетъ быть доказано *при помощи плоскаго построенія.*

Первое предположеніе (a) равносильно отрицанію евклидовой геометріи; мы не станемъ обсуждать вопроса, возможно ли такое отрицаніе; замѣтимъ только, что—если это предположеніе (a) допустить, то вопросъ о доказуемости постулата рѣшается въ отрицательномъ смыслѣ по существу дѣла. Намъ нужно еще только показать, что и въ остальныхъ случаяхъ доказательство не можетъ быть проведено при помощи планиметрическихъ разсужденій. Оставляя въ сторонѣ предположеніе (a), мы тѣмъ самымъ допускаемъ, что евклидова геометрія не заключаетъ внутренняго противорѣчія; мы вынуждены будемъ поэтому признать логически правильными выводы Бельтрами, опирающіеся на евклидову геометрію.

Допустимъ теперь, что нѣкоторое разсужденіе, основанное исклю-

*) *Hoüel.* „Note Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la thé rie des parallèles dit Postulatum d'Euclide". „Giornale di Mathematiche". T. VIII. 1870.

чительно на свойствахъ планиметрическихъ образовъ, привело бы къ доказательству евклидова постулата. Каждому образу плоской геометріи соотвѣтствуетъ образъ на псевдосферѣ, подходящій подъ то-же самое формальное опредѣленіе; каждому свойству образа планиметрическаго, въ предѣлахъ абсолютной части геометріи, соотвѣтствуетъ свойство образа псевдосферическаго, которое выражается буквально тѣми-же словами. Мы видѣли также во введеніи, что всѣ методы, которыми мы пользуемся при развитіи плоской геометріи, приложимы на поверхностяхъ постоянной кривизны. Въ виду этого, планиметрическое доказательство евклидова постулата могло бы быть повторено слово въ слово въ примѣненіи къ образамъ псевдосферическимъ; и здѣсь оно доказывало бы, что черезъ точку, расположенную на псевдосферѣ внѣ данной геодезической линіи, можно провести только одну геодезическую линію, не встрѣчающую первой; но такое предложеніе прямо противорѣчитъ выводамъ Бельтрами; [redacted] такъ какъ этихъ послѣднихъ выводовъ мы отрицать не можемъ, не отрицая евклидовой системы, то источникъ противорѣчія заключается въ допущеніи возможности планиметрическаго доказательства постулата. Въ концѣ своего мемуара („Saggio“) Бельтрами говоритъ, что онъ пытался дать истолкованіе [redacted] стереометріи Лобачевскаго,—но это ему не удалось. Онъ высказываетъ также увѣреніе, что это и вообще невозможно сдѣлать, и приводитъ въ подтвержденіе этого нѣкоторыя соображенія, которыхъ, однако, нельзя считать убѣдительными. Итакъ, значеніе работъ Бельтрами сводится [redacted] слѣдующему: онъ далъ реальное истолкованіе планиметріи Лобачевскаго и тѣмъ возбудилъ интересъ къ изученію его сочиненій; при допущеніи, что евклидова геометрія не заключаетъ внутренняго противорѣчія, изслѣдованія Бельтрами приводятъ къ заключенію, что евклидовъ постулатъ не можетъ быть доказанъ при помощи планиметрическаго построенія. *)

Оставляя покамѣстъ въ сторонѣ нѣкоторыя существенныя возраженія, которыя здѣсь могутъ быть сдѣланы, замѣтимъ прежде всего, что изъ изслѣдованій Бельтрами ни съ какой точки зрѣнія не вытекаетъ, что евклидовъ постулатъ не можетъ быть доказанъ при помощи разсужденій стереометрическихъ.

Соображенія, на которыхъ покоится предыдущій выводъ, сводится, какъ мы видѣли, къ слѣдующему. Если допустить, что евклидова геометрія не заключаетъ внутренняго противорѣчія, то можно обнаружить существованіе планиметрическихъ образовъ, къ которымъ примѣнима планиметрія Лобачевскаго. Если-бъ такимъ образомъ оказалось возможнымъ обнаружить существованіе образовъ стереометрическихъ, къ которымъ прилагается *вся* геометрія Лобачевскаго, то тѣ-же сообра-

*) Въ виду элементарнаго характера настоящаго сочиненія, [redacted] не могли входить въ оцѣнку аналитическихъ изслѣдованій Бельтрами. Въ интересахъ точности мы позволимъ себѣ высказать убѣжденіе, что математикъ встрѣтитъ еще весьма серьезныя затрудненія, если онъ пожелаетъ со всей строгостью современныхъ методовъ обнаружить существованіе такой поверхности съ постоянной отрицательной кривизной, которая формально обладаетъ безусловно всѣми свойствами евклидовой плоскости, независящими отъ XI-го постулата.

женія можно было бы примѣнить къ доказательству стереометрическому. Такое открытіе не заставило себя долго ждать.

Англійскій математикъ Кели (Cayley) въ пятидесятыхъ годахъ опубликовалъ рядъ мемуаровъ относительно двойныхъ и тройныхъ формъ. Шестой мемуаръ *) посвященъ геометрической интерпретаціи теоріи, изложенной въ предыдущихъ его работахъ Одинъ изъ полученныхъ имъ результатовъ оказался существенно важнымъ по отношенію къ тому циклу вопросовъ, которые насъ занимаютъ. Кели показалъ, что метрическая геометрія въ извѣстномъ смыслѣ можетъ быть разсматриваема, какъ частный случай геометріи проэктивной. Сущность его доказательства заключается въ слѣдующемъ: онъ обнаружилъ существованіе безчисленнаго множества (∞^3) проэктивныхъ сопряженій съ тремя степенями свободы, которые всѣ оставляютъ безъ измѣненія нѣкоторое коническое сѣченіе. Эти сопряженія обладаютъ инваріантами, которые по формальнымъ своимъ свойствамъ аналогичны разстоянію между двумя точками и углу между прямыми. Эти краткія указанія мы сдѣлали лишь для того, чтобы не нарушать историческаго хода преемственности идей. Сущность дѣла будетъ ниже вполнѣ выяснена.

Идеей Кели воспользовался Клейнъ и въ цѣломъ рядѣ мемуаровъ развилъ ихъ въ геометрическую систему, способную служить интерпретаціей идей Лобачевскаго. **) Кели показалъ затѣмъ, какъ въ частномъ случаѣ привести всѣ требуемыя вычисленія, указанныя Клейномъ. ***) При этомъ нужно однако замѣтить, что Кели не выходилъ за предѣлы планиметрическихъ образовъ и распространеніе его идей на образы стереометрическіе, хотя и не представляетъ никакихъ затрудненій, но было указано только Клейномъ. Сущность этихъ идей мы и имѣемъ въ виду сейчасъ изложить. Они требуютъ нѣкоторыхъ свѣдѣній изъ области проэктивной геометріи Мы укажемъ положенія, которыя нужны для развитія идей Кели—Клейна, но доказывать будемъ только основныя положенія, принадлежащія именно излагаемой теоріи, а не проэктивной геометріи вообще.

Положимъ, что точки пространства отнесены къ нѣкоторой системѣ ортогональныхъ декартовыхъ координатъ и пусть x, y, z будутъ координаты нѣкоторой произвольной точки M. Мы согласимся производить различнаго рода сопряженія; это значитъ: мы будемъ устанавливать различныя правила, изъ которыхъ каждое опредѣляетъ для всякой точки пространства нѣкоторую другую точку, которую мы будемъ называть сопряженной съ первой или соотвѣтствующей первой. Всякій разъ, какъ такое правило будетъ установлено, мы будемъ говорить, что произведено сопряженіе. Всякое такое сопряженіе замѣняетъ точки

*) *A. Cayley* „Sixth memoir upon Quantics: *Philosophic. Transactions* of the R. S L. 1859.

**) *F. Klein*. „Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie“. „Nachrichten der Göttingener Gesellschaft“. 1871.

Подъ тѣмъ же заголовкомъ помѣщены Клейномъ статьи въ „Mathematische Annalen“ за 1871, 1873 и 1874 г. Всѣ статьи посвящены развитію одной и той-же идеи.

***) Cayley. „On the Non-Euclidean Geometry“. „Mathematische Annalen“. 1872.

нѣкотораго геометрическаго образа Q точками, составляющими другой геометрическій образъ Q_1. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что это сопряженіе преобразуетъ образъ Q въ образъ Q_1. Такое сопряженіе, въ которомъ между координатами x, y, z произвольной, точки M и координатами x', y', z' соотвѣтствующей ей точки существуетъ соотношеніе вида

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{kx + ly + mz + n}$$

$$y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{kx + ly + mz + n} \qquad (1)$$

$$z' = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{kx + ly + mz + n}$$

гдѣ коэффиціенты a_1 b_1 . . . k, l, m, n суть опредѣленныя дѣйствительныя числа,—называется проэктивнымъ сопряженіемъ.

Каждой системой значеній коэффиціентовъ a_1 . . . n опредѣляется *одно* проэктивное сопряженіе; совокупность всѣхъ возможныхъ проэктивныхъ сопряженій, соотвѣтствующихъ всѣмъ возможнымъ значеніямъ коэффиціентовъ a_1 . . . n, составляетъ *полную систему проэктивныхъ сопряженій*.

Уравненія (1) выражаютъ полную систему проэктивныхъ сопряженій, если коэффиціенты a_1, b_1 . . . m, ■ считать перемѣнными параметрами.

Проэктивныя сопряженія обладаютъ слѣдующими замѣчательными свойствами:

A) Если нѣкоторое проэктивное сопряженіе сопрягаетъ точки M, M′, M″, M‴ . . . . съ точками: M_1, M'_1, M''_1, M'''_1 . . ., а нѣкоторое другое проэктивное сопряженіе сопрягаетъ точки M_1, M'_1, M''_1, M'''_1 . . . съ точками M_2, M'_2, M''_2, M'''_2 . . ., то существуетъ нѣкоторое проэктивное же сопряженіе, которое сопрягаетъ точки M, M′, M″, M‴ . . . . съ точками M_2, M'_2, M''_2, M'''_2 . . . Иначе говоря, если нѣкоторое проэктивное сопряженіе преобразовываетъ образъ Q въ образъ Q_1, нѣкоторое другое проэктивное сопряженіе преобразовываетъ образъ Q_1 въ образъ Q_2, то всегда существуетъ проэктивное сопряженіе, которое преобразовываетъ образъ Q въ Q_2.

Еще иначе: каждымъ двумъ проэктивнымъ сопряженіямъ отвѣчаетъ третье, которое производитъ тѣ-же преобразованія, что и два данныхъ сопряженія при послѣдовательномъ производствѣ ихъ.

Всякая система сопряженій, обладающая указаннымъ свойствомъ, т. е. всякая такая система, въ которой послѣдовательное производство двухъ сопряженій производитъ тѣ-же преобразованія, что и производство нѣкотораго третьяго сопряженія той же системы, — называется *группой* сопряженій. Поэтому свойство (A) полной системы проэктивныхъ сопряженія можетъ быть формулировано слѣдующимъ образомъ: *совокупность всѣхъ проэктивныхъ сопряженій составляетъ группу.*

B) Если существуетъ проэктивное сопряженіе, которое сопрягаетъ точки M, M′, M″ . . . съ точками M_1, M'_1, M''_1 . . . , то существуетъ и такое проэктивное соотвѣтствіе, которое сопрягаетъ точки M_1, M'_1, M″ . . . . съ точками M, M′. M″ . . . . Два такихъ сопряженія называются взаимнообратными. *)

C) Всякое проэктивное сопряженіе преобразовываетъ плоскость въ плоскость-же. Поэтому всякая прямая, которая можетъ быть разсматриваема, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей, преобразовывается въ линію пересѣченія сопряженныхъ съ ними плоскостей, т. е. въ прямую линію.

D) Ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ равно ангармоническому отношенію четырехъ сопряженныхъ точекъ.

E) Если нѣкоторое проэктивное сопряженіе сопрягаетъ точки M и N съ точками M_1, N_1—то всѣ точки отрѣзка MN сопрягаются съ точками отрѣзка M_1N_1.

Доказательства этихъ предложеній можно найти во всякомъ курсѣ проэктивной геометріи.

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

ЗАДАЧИ.

№ 571. Показать, что

a) 8-ая степень цѣлаго числа можетъ быть представлена въ видѣ $17n$ или $17n \pm 1$;

b) 9-ая степень цѣлаго числа—въ видѣ $19n$ или $19n \pm 1$;

c) 11-ая » » » — » » $23n$ или $23n \pm 1$;

d) 20-ая » » » — » » $25n$ или $25n + 1$;

e) 42-ая » » » — » » $49n$ или $49n + 1$.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 572. По даннымъ сторонамъ треугольника *ABC* вычислить площадь $\triangle_a$ треугольника, образованнаго высотою, опущенною изъ *A*, и внутренними биссекторама угловъ *B* и *C*, — и площадь $\triangle'_a$ треугольника, образованнаго тою же высотою и внѣшними биссекторами угловъ *B* и *C*.

Показать, что

$$\sqrt[3]{\frac{\triangle_a}{\triangle'_a}} + \sqrt[3]{\frac{\triangle_b}{\triangle'_b}} + \sqrt[3]{\frac{\triangle_c}{\triangle'_c}} = 1,$$

гдѣ $\triangle_b$. $\triangle'_b$; $\triangle_c$, $\triangle'_c$ имѣютъ значеніе, аналогичное $\triangle_a$ и $\triangle'_a$.

М. Зиминъ (Юрьевъ).

*) Впрочемъ, это предложеніе справедливо лишь въ предположеніи, что опредѣлитель $\Sigma(a_1\ b_2\ c_3\ n)$ отличенъ отъ нуля, что мы и будемъ впредь предполагать.

№ 573. На данномъ отрѣзкѣ можно построить шесть подобныхъ между собой треугольниковъ, расположенныхъ съ одной стороны этого отрѣзка. Показать, что 1) шесть вершинъ этихъ треугольниковъ, противолежащія общей сторонѣ, лежатъ на одной окружности; 2) всѣ полученныя такимъ образомъ для даннаго отрѣзка окружности имѣютъ общую радикальную ось.

(Заимств.) *Е. Е*

№ 574. Рѣшить систему:

$$(x+2y)\ (x+2z)=a^2,$$

$$(y+2x)\ (y+2z)=b^2,$$

$$(z+2x)\ (z+2y)=c^2.$$

Я. Тепляковъ (Кіевъ).

№ 575. По данной суммѣ двухъ сторонъ треугольника $a+b=m$, сторонѣ c и площади S вычислить безъ помощи тригонометріи радіусъ описанной около треугольника окружности.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 576. Градуированный стеклянный цилиндръ наполняется при 0^0 ртутью до дѣленія, обозначеннаго числомъ 1150. Какую тепературу долженъ имѣть такой снарядъ, чтобы ртуть поднялась до дѣленія 1151?

Коэффиціентъ абсолютнаго расширенія ртути $=0{,}00018$.

Коэффиціентъ кубическаго расширенія стекла $=0{,}000026$.

М. Гербановскій.

МАЛЕНЬКІЕ ВОПРОСЫ.

1. Для пассажировъ поѣзда, идущаго со скоростью v, капли дождя кажутся падающими подъ угломъ a къ горизонту; для пассажировъ встрѣчнаго поѣзда, идущаго со скоростью v', капли дождя кажутся падающими подъ угломъ b. Каково истинное направленіе капель дождя въ частномъ случаѣ, когда $v=v'$, и въ общемъ случаѣ.

2. Пароходъ, идущій по морю со скоростью v, встрѣчаетъ въ часъ a волнъ, когда идетъ въ одномъ направленіи, и b волнъ, когда идетъ въ направленіи прямо-противоположномъ. Что можно опредѣлитъ относительно волнъ моря по этимъ даннымъ?

3. Пароходъ проходитъ одно и то же разстояніе взадъ и впередъ одинъ разъ по запруженной рѣкѣ, другой разъ по текущей. Въ какой водѣ потребуется для этого больше времени, если скорость его остается тою же?

4. Покупатель, покупая алмазъ, попросилъ продавца свѣсить его, положивъ одинъ разъ на одну чашку вѣсовъ, другой разъ —

на другую, и заплатилъ за алмазъ по разсчету, что вѣсъ алмаза равенъ полусуммѣ полученныхъ вѣсовъ. Въ случаѣ неравноплечности вѣсовъ, кому выгоднѣе такая оцѣнка, чѣмъ оцѣнка на основаніи истиннаго вѣса,—продавцу или покупателю?

5. Если бы тѣла всѣхъ людей, обитающихъ на земномъ шарѣ, сложить въ видѣ конуса, радіусъ основанія котораго равенъ высотѣ, то какой приблизительно высоты получилась бы горка? (принимая, напр., что на землѣ живетъ 1,500 милльоновъ людей и что средній вѣсъ человѣка—60 килограммовъ).

Сообщилъ *Б. И. Вейнбергъ.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 390 (3 сер.). ***На плоскости начерчена окружность и прямая* P, *проходящая черезъ центръ этой окружности. Не пользуясь циркулемъ, при помощи линейки опустить изъ данной въ той же плоскости точки* A *перпендикуляръ на прямую* P.**

Соединимъ точку A съ точками B и C пересѣченія прямой P съ данной окружностью. Пусть прямыя AB и AC пересѣкаютъ окружность соотвѣтственно въ точкахъ D и E. Такъ какъ

$$\angle CDB = \angle CEB = \frac{\pi}{2},$$

то точка F пересѣченія прямыхъ BE и CD есть ортоцентръ треугольника Слѣдовательно прямая AF есть искомый перпендикуляръ.

Л. Кинги (Гельсингфорсъ); *С. Циклинскій* (Пинскъ); *Лежебокъ* и *Г.* (Иваново-Вознесенскъ); *А. Д.* (Иваново-Вознесенскъ); *И. Величко* (Могилевъ); *М. Зиминъ* (Орелъ); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *П. Максимовъ* (Курскъ); *С. Адамовичъ* (Двинскъ).

№ 465 bis (3 сер.). ***Найти три цѣлыхъ положительныхъ числа, зная, что сумма ихъ равна 10, а сумма ихъ двойныхъ произведеній равна 31.***

Пусть x, y, z — искомыя числа. Изъ условій задачи имѣемъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2\,(xy + xz + yz) = 10^2 - 2\,.\,31 = 38.$$

Разлагая 38 путемъ испытаній на сумму трехъ квадратовъ, получимъ два разложенія:

$$38 = 1^2 + 1^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2.$$

Лишь второе разложеніе даетъ

$$2 + 3 + 5 = 10,\quad 2\,.\,3 + 3\,.\,5 + 5\,.\,2 = 31.$$

Поэтому искомыя числа суть

$$x = 2,\quad y = 3,\quad z = 5.$$

А. Варенцовъ (Ростовъ на Дону); *И. Поповскій* (Умань).

№ 480 (3 сер.). *Изъ уравненій*

$$p = a \cdot n$$

$$P = \frac{2anr}{\sqrt{4r^2-a^2}}$$

$$p_1 = 2n\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2-a^2}}$$

$$P' = \frac{4nr\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2-a^2}}}{\sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2-a^2}}}$$

исключить a, n, r [redacted] *показать, что*

$$p_1^2 = P' . p \text{ и } P' = \frac{2Pp}{P+p}.$$

Разсмотримъ случай (см. рѣшеніе зад. [redacted] 473 въ № 272), когда

$$2r > a > 0.$$

Отложивъ въ окружности O радіуса r хорду $AB = a$, обозначимъ центральный уголъ AOB черезъ $4x$. Вычисливъ хорду, противолежащую углу $2x$, для чего примѣнимъ къ хордѣ a ту формулу, которая служитъ для удвоенія числа сторонъ правильнаго многоугольника, получимъ выраженіе

$$\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

Помноживъ каждую изъ хордъ

$$a, \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

на отношенія, равныя соотвѣтственно частному отъ дѣленія радіуса r на разстояніе хорды отъ центра, — для чего можно воспользоваться формулой, служащей для перехода отъ стороны правильнаго вписаннаго многоугольника къ сторонѣ одноименнаго описаннаго, — найдемъ выраженія

$$\frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}, \quad \frac{2r\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}}{\sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - a^2}}}.$$

Съ другой стороны, вычисляя четыре вышеупомянутыхъ отрѣзка тригонометрическимъ путемъ, найдемъ

$$[redacted] = 2r \sin 2x,$$

$$\frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}} = 2r \operatorname{tang} 2x,$$

$$\sqrt{r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}} = 2r \sin x,$$

$$\frac{2r\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}}{\sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - a^2}}} = 2r \operatorname{tang} x.$$

Поэтому данная система уравненій равносильна слѣдующей:

$$p = 2rn \sin 2x$$

$$P = 2rn \operatorname{tang} 2x$$

$$p_1 = 4rn \sin x$$

$$P' = 4rn \operatorname{tang} x.$$

Исключая изъ любыхъ трехъ изъ этихъ уравненій r, n и x, получимъ четыре соотношенія между величинами p, P, p_1, P' — по одному для каждыхъ трехъ изъ этихъ величинъ. Эти четыре соотношенія сводятся къ двумъ независимымъ, напримѣръ, къ даннымъ въ текстѣ задачи. Чтобы получить ихъ въ общемъ случаѣ, преобразуемъ P', умноживъ числителя и знаменателя дроби

$$\frac{4nr\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}}{\sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - a^2}}}$$

на

$$\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}};$$

тогда найдемъ:

$$P' = \frac{4n(2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2})}{a}.$$

Пользуясь этимъ выраженіемъ для P', увидимъ, что равенство

$$p_1^2 = P'.p$$

провѣряется непосредственной подстановкой.

Точно также найдемъ:

$$\frac{2P.p}{P+p} = \frac{4na}{\sqrt{4r^2 - a^2} + 2r}.$$

Умноживъ числителя и знаменателя второй части на

$$2r - \sqrt{4r^2 - a^2},$$

получимъ:

$$\frac{2Pp}{P+p} = \frac{4n(2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2})}{a} = P'.$$

Я. Полушкинъ (Знаменка); *Л. Могазаникъ* (Бердичевъ); *Н. С.* (Одесса); *П. Лисевичъ* (Курскъ).

№ 490 (3 сер.). *Медіаны треугольника составляютъ ариөметическую прогрессію; при какихъ условіяхъ этотъ треугольникъ будетъ прямоугольнымъ, косоугольнымъ и тупоугольнымъ?*

Пусть медіаны къ сторонамъ треугольника a, b, c суть соотвѣтственно

$$x,\ x + y,\ x + 2y,$$

гдѣ

$$y \geqslant 0 \qquad (1)$$

Изъ рѣшенія общеизвѣстной задачи — *построить треугольникъ по тремъ медіанамъ* — вытекаетъ необходимое и достаточное для возможности задачи условіе, заключающееся въ томъ, что изъ медіанъ треугольника въ свою очередь можно образовать треугольникъ. Въ данномъ случаѣ необходимо и достаточно предположить, что

$$x > y.$$

Извѣстная формула, связывающая три стороны и одну изъ медіанъ, даетъ уравненія:

$$-a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 4x^2$$

$$2a^2 - b^2 + 2c^2 = 4(x+y)^2$$

$$2a^2 + 2b^2 - c^2 = 4(x+2y)^2.$$

Изъ этихъ уравненій находимъ:

$$a^2 = \frac{-x^2 + 2(x+y)^2 + 2(x+2y)^2}{2}$$

$$b^2 = \frac{2x^2 - (x+y)^2 + 2(x+2y)^2}{2} \qquad (2)$$

$$c^2 = \frac{2x^2 + 2(x+y)^2 - (x+2y)^2}{2}.$$

Эти формулы указываютъ (см. 1) на то, что a — наибольшая сторона или, въ случаѣ, когда $y = 0$ одна изъ трехъ равныхъ сторонъ треугольника; слѣдовательно, противъ нея лежитъ наибольшій уголъ или одинъ изъ трехъ равныхъ угловъ треугольника. Поэтому треугольникъ будетъ прямоугольнымъ, тупоугольнымъ и косоугольнымъ, смотря по тому, будетъ-ли выраженіе:

$$b^2 + c^2 - a^2$$

равно нулю, меньше или больше нуля.

Но вышеуказанное выраженіе приводится (см. 2) къ виду

$$\frac{1}{2}[5x^2 - (x+y)^2 - (x+2y)^2] = \frac{1}{2}(3x^2 - 6xy - 5y^2).$$

Разлагая выраженіе

$$3x^2 - 6xy - 5y^2$$

на множителей, найдемъ:

$$3x^2 - 6xy - 5y^2 = 3\left[x - y\left(1 + \sqrt{\frac{8}{3}}\right)\right]\left[x + y\left(\sqrt{\frac{8}{3}} - 1\right)\right].$$

При

$$x > y \geqslant 0$$

послѣдній изъ множителей сохраняетъ положительное значеніе.

Поэтому все выраженіе будетъ равно нулю, меньше или больше нуля, смотря по знаку разности

$$x-y\left(1+\sqrt{\frac{8}{3}}\right).$$

Итакъ, если $x>y$ и

$$x=y\left(1+\sqrt{\frac{8}{3}}\right).$$

треугольникъ будетъ прямоугольный.

Если $x>y$ и

$$x<y\left(1+\sqrt{\frac{8}{3}}\right),$$

треугольникъ тупоугольный; если же $x>y$ и

$$x>y\left(1+\sqrt{\frac{8}{3}}\right),$$

то треугольникъ косоугольный.

С. Адамовичъ (Двинскъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Н. С.* (Одесса); неполное рѣшеніе далъ *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону).

№ 491 (3 сер.). *Платиновый шаръ, взвѣшенный въ ртути, теряетъ 50 граммовъ своего вѣса при 0^0 и 49,5415 граммовъ при 60^0. Опредѣлить коэффиціентъ кубическаго расширенія платины, зная, что коэффиціентъ абсолютнаго расширенія ртути равенъ $\frac{1}{5550}$, а ея плотность при 0^0 — 13,6.*

Пусть V куб. цм. — объемъ платиноваго шара при 0^0. Тогда вѣсъ вытѣсненной шаромъ при 0^0 ртути въ граммахъ есть

$$V\,.\,13{,}6=50. \qquad (1)$$

Пусть x — коэффиціентъ кубическаго расширенія платины. Тогда объемъ шара при 60^0 есть

$$V(1+60x),$$

а плотность ртути при 60^0

$$13{,}6\,.\,\frac{1}{1+\frac{60}{5550}}=13{,}6\,.\,\frac{185}{187}.$$

Поэтому

$$V(1+60x)\,.\,13{,}6\,.\,\frac{185}{187}=49{,}5415.$$

Дѣля это уравненіе на уравненіе (1), получимъ:

$$\frac{185}{187}\cdot(1+60x)=\frac{49{,}5415}{50},$$

откуда

$$x = 0{,}000026$$

съ точностью до 0,0000005.

Не мѣшаетъ замѣтить, что данное 13,6 является совершенно лишнимъ.

С. Адамовичъ (Двинскъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону); *И. Поповскій* Умань)

ОТЧЕТЫ О ЗАСѢДАНІЯХЪ УЧЕНЫХЪ ОБЩЕСТВЪ.

Математическое Отдѣленіе Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей

4-го декабря 1898 года.

Предсѣдатель *В. А. Циммерманъ.* Присутствовали члены Общества: *А. С. Васильевъ, Б. Ф. Вериго, И. М. Занчевскій, В. Ѳ. Каганъ, Г. П. Каченовскій, К. В. Май, Ѳ. Н. Милятицкій, В. В. Преображенскій, И. В. Слешинскій, П. Я. Точидловскій и С. О. Шатуновскій.*

Предметы занятій:

I. Прочитанъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

II. Выслушано сообщеніе члена Общества Г. П. Каченовскаго: „О рѣшеніи уравненій 3-й и 4-й степени". *)

III. Членъ Общества Николай Дмитріевичъ Пильчиковъ демонстрировалъ построенный имъ разрядный электрометръ. Приборъ предназначенъ для классныхъ демонстрацій. См. Приложеніе къ этому протоколу.

IV. Выслушано сообщеніе Николая Дмитріевича Пильчикова: „По поводу теоремы о давленіи въ діэлектрикѣ". Продолженіе и обсужденіе этого сообщенія назначено на слѣдующее засѣданіе.

V. Владиміръ Александровичъ Гернетъ изложилъ и демонстрировалъ „способъ окрашиванія безъ помощи пигментовъ". Способъ состоитъ въ покрытіи окрашиваемаго тѣла прозрачной пленкой весьма малой толщины.

VI. Андрей Александровичъ Калинкевичъ демонстрировалъ и объяснилъ устройство хромоскопа Ives'а.

Разрядной электрометръ.

Въ средней, да и въ высшей школѣ многіе основные вопросы электростатики (дробленіе электрическаго заряда на части пропорціональныя электроемкостямъ кондукторовъ, разложеніе нейтральнаго электричества на равные, но противоположные по знаку заряды и проч.) излагаются обыкновенно безъ демонстраціи, вслѣдствіе частію хлопотности, частію сложности опытной провѣрки излагаемаго при соблюденіи основного условія школьнаго преподаванія—простоты и наглядности.

Предлагаемый электрометръ, построенный препараторомъ физической лабораторіи Университета г. Захаровымъ, даетъ возможность просто и наглядно демонстрировать на опытѣ справедливость основныхъ теоремъ электростатики, а также и нѣкоторыхъ важныхъ законовъ электрическихъ теченій, напр. закона Ома, дающаго зависимость между силою тока, сопротивленіемъ цѣпи и электровозбудительною (электродвижущею) силою.

*) См. № 271 „Вѣстникъ Оп. Физики".

Электрометръ состоитъ изъ металлической коробки со стеклянными окнами, внутрь которой опускается сквозь верхнюю эбонитовую крышку мѣдная узкая пластинка съ приклеенной къ ней своимъ верхнимъ концомъ полосочкой листового золота. Сквозь боковую стѣнку металлической коробки электрометра въ эбонитовой втулкѣ можетъ горизонтально двигаться металлическій стерженекъ, на внутреннюю часть котораго надѣтъ кусочекъ угля. Вдвигая этотъ стерженекъ болѣе или менѣе можно приближать его на большее или меньшее разстояніе отъ золотого листочка электрометра и тѣмъ въ весьма широкихъ предѣлахъ измѣнять чувствительность электрометра.

Пользованіе приборомъ весьма просто.

Положимъ, требуется показать дробленіе заряда между двумя равными шарами. Соединяемъ съ разряднымъ электрометромъ цилиндръ Фарадея помощью тонкой ниточки. Внесемъ въ цилиндръ Фарадея заряженный шаръ. Положимъ, что при взятомъ разстояніи уголька отъ золотого листочка произошло 20 между ними прикосновеній. Выймемъ шаръ изъ цилиндра, наблюдаемъ опять 20 прикосновеній. Коснувшись однимъ шаромъ о другой незаряженный того-же діаметра внесемъ порознь каждый изъ нихъ въ цилиндръ Фарадея. Найдемъ что оба они будутъ вызывать лишь десять прикосновеній. Если же введемъ оба шара въ цилиндръ одновременно, то получиться вновь 20 прикосновеній *).

Такъ же просто и наглядно демонстрируется законъ Ома.

Возьмемъ большую лейденскую банку, соединимъ ея внутреннюю обкладку съ хорошо изолированнымъ крючкомъ, положимъ съ помощью четырехъ нитокъ. Помѣстимъ въ нѣкоторомъ отдаленіи разрядной электрометръ, на головкѣ котораго прикрѣпимъ тонкую длинную проволочку оканчивающуюся крючкомъ, который можно было бы набрасывать на одну или нѣсколько нитокъ, натянутыхъ между лейденской банкой и крючкомъ.

Зарядивъ лейденскую банку положимъ 10 искрами опредѣленной длины при помощи какой-либо электрической машины набросимъ крючекъ проволоки разряднаго электрометра на одну проволоку. Положимъ что по метроному получится одно соприкосновеніе въ 1 сек. Набросимъ крючекъ на 2—4 нитки, число соприкосновеній будетъ 2—4 въ 1 сек. Если-же отодвинемъ крючекъ отъ лейденской банки вдвое—втрое дальше. число прикосновеній уменьшится вдвое, втрое. Если при тѣхъ же условіяхъ зарядимъ банку не 10 а положимъ 30 той-же длины искрами, то числа прикосновеній возрастутъ втрое. (Надо до начала опыта вполнѣ устранить остаточный зарядъ лейденской банки).

При устройствѣ разряднаго электрометра весьма существенно брать именно золотой листочекъ и уголекъ. Другіе листочки (аллюминіевый, серебрянный и проч.) даже и при соприкосновеніи съ углемъ могутъ не отходить назадъ (вслѣдствіе прилипанія). Безъ уголька дѣйствіе электрометра также было бы не надежно.

Н. Д. Пильчиковъ.

***) При подобныхъ опытахъ изоляція должна быть превосходна. Давно пора оставить употребленіе стеклянныхъ палочекъ какъ ручекъ къ шарамъ, дискамъ и проч. Надо брать или шелковыя нитки (не крашенныя, не сученныя) или парафиновыя (свѣжія не покрытыя еще пылью) палочки, которыя легко отливаются въ бумажныхъ трубочкахъ (снимаемыхъ по застываніи парафина) и тогда электростатическіе опыты удаются и при переполненной аудиторіи и во всякую погоду.**

Редакторъ **В. А. Циммерманъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою, Одесса, 10-го Декабря 1899 г.

Типографія Г. М. Левинсона, Ришельевская, домъ № 19.